数理解析研究所講究録
594巻 1986年 77-96

ミクロ双曲型境界値問題

東大・理　大阿久 俊則
(Toshinori ÔAKU)

柏原 - Schapira [4] は線型偏(擬)微分方程式系に対して、ミクロ双曲性という概念を定義し、解のミクロ解析性の伝播(内部問題)に関する次の基本的な結果を示した:

<u>定理(柏原 - Schapira)</u>. M を実解析的多様体, X をその複素化として、$\mathcal{M}$ を $x^* \in T^*_M X$ の近傍で定義された連接 $\mathcal{E}_X$-加群(即ち線型擬微分方程式系)とする. φ を $T^*_M X$ 上の実数値 C^1 級函数として、$Z = \{\varphi \leq 0\} \subset T^*_M X$ とおく. このとき、もし $\mathcal{M}$ が $d\varphi$ 方向にミクロ双曲型ならば ($\varphi(x^*) = 0$ とする)

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_Z(\mathcal{C}_M))_{x^*} = 0.$$

我々の目標は境界値問題の場合にこの定理の類似を証明し、それを用いてミクロ解析性の境界迄の伝播に関する金子([1])の定理を拡張することである.

<u>§1. ミクロ境界値問題の定式化</u>.

境界値問題の場合に上の定理の $\mathcal{C}_M$(マイクロ函数の層)に

当たるものとして、$\mathcal{C}_{M_+}$という層を導入し、それが境界値の超局所化と関係付けられることを示そう（[6]を参照）。これは、柏原-河合[3]による層$\mathcal{C}_{N|X}$や片岡[5]による層$\mathcal{C}_{M_+|X}$とは異なり全く座標系によらずに定義される訳ではないが、より直接的に解の境界値（マイクロ函数としての）と結びついていると思われる。

Mをn次元パラコンパクト実解析的多様体、Xをその複素化とする。M_+をMの開集合でその境界$N=\partial M_+$は実解析的なものとして、$Y\subset X$をNの複素化とする。更に次の性質を持つXの実部分多様体$\tilde{M}$とその開集合$\tilde{M}_+$が存在すると仮定する：$M\subset\tilde{M}\subset X$，$\tilde{M}_+\cap M=M_+$，$\tilde{M}_+$の$\tilde{M}$における境界は$Y$，$(M,\tilde{M},\tilde{M}_+)$は局所的には$X$の複素座標系により、$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1},\mathbb{R}_+\times\mathbb{C}^{n-1})$と同型．但し$\mathbb{R}_+=\{t\in\mathbb{R}\,;\,t>0\}$とする．このような複素座標系$z=(z_1,z')$（$z'=(z_2,\cdots,z_n)$，$z_j=x_j+\sqrt{-1}y_j$）を以下ではadmissibleと呼ぶ。

注意．もしM上の実数値実解析函数φで，$N=\{x\in M\,;\,\varphi(x)=0\}$，$M_+=\{x\in M\,;\,\varphi(x)>0\}$かつM上で$d\varphi\neq0$なるものが存在したとすると、$X$をMの複素近傍で、$\varphi$は$X$上定義され$d\varphi\neq0$なるものとし、

$$\tilde{M}=\{z\in X\,;\,\mathrm{Im}\,\varphi(z)=0\},\quad \tilde{M}_+=\{z\in\tilde{M}\,;\,\varphi(z)>0\}$$

とおけば上の条件がみたされる．

このとき $\tilde{M}$ 上に正則パラメータ付超函数の層 $\mathcal{BO} = \mathcal{H}^1_{\tilde{M}}(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{\tilde{M}}$ （$\omega_{\tilde{M}}$ は $\tilde{M}$ の *orientation sheaf*）が定義される．$\iota : M_+ \hookrightarrow M$，$\tilde{\iota} : \tilde{M}_+ \hookrightarrow \tilde{M}$ を自然な埋め込みとして、次の層を定義する（$\mathcal{B}_M$ は M 上の超函数の層）:

<u>定義 1.1.</u> $\mathcal{B}_{M_+} = \iota_* \iota^{-1} \mathcal{B}_M$，$\mathcal{B}_{N|M_+} = \mathcal{B}_{M_+}|N$，

$\mathcal{BO}_{\tilde{M}_+} = \tilde{\iota}_* \tilde{\iota}^{-1} \mathcal{BO}$，$\mathcal{BO}_{Y|\tilde{M}_+} = \mathcal{BO}_{\tilde{M}_+}|Y$，

$\tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+} = \mathcal{H}^{n-1}_N(\mathcal{BO}_{Y|\tilde{M}_+}) \otimes \omega_N$．

$\pi_{M/\tilde{M}} : S^*_M\tilde{M} \sqcup (\tilde{M} \setminus M) = \widetilde{M\tilde{M}}^* \longrightarrow \tilde{M}$，$\pi_{N/Y} : \widetilde{NY}^* \longrightarrow Y$ をコモノイダル変換とする．$\mathcal{B}_{M_+} \cong \mathcal{H}^{n-1}_M(\mathcal{BO}_{\tilde{M}_+}) \otimes \omega_{M/\tilde{M}}$ に注意して、$\mathcal{B}_{M_+}$，$\mathcal{B}_{N|M_+}$，$\tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ の超局所化を次のように定義する:

<u>定義 1.2.</u> $\mathcal{C}_{M_+} = \mathcal{H}^{n-1}_{S^*_M\tilde{M}}(\pi_{M/\tilde{M}}^{-1}\mathcal{BO}_{\tilde{M}_+})^a \otimes \omega_{M/\tilde{M}}$，

$\mathcal{C}_{N|M_+} = \mathcal{C}_{M_+}|S^*_NY$，$\tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+} = \mathcal{H}^{n-1}_{S^*_NY}(\pi_{N/Y}^{-1}\mathcal{BO}_{Y|\tilde{M}_+})^a \otimes \omega_N$．

ここで a は *antipodal map*，また S^*_NY は自然に $S^*_M\tilde{M}$ の（$x_1 = 0$ で定義される）部分集合とみなされることに注意する．SKK[12]と同様の議論により次を得る．

<u>命題 1.1.</u> 次の短完全系列が存在する:

$$0 \longrightarrow \mathcal{BO}_{\tilde{M}_+}|M \longrightarrow \mathcal{B}_{M_+} \xrightarrow{sp_+} (\pi_{M/\tilde{M}})_*\mathcal{C}_{M_+} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{BO}_{Y|\tilde{M}_+}|N \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+} \xrightarrow{\tilde{sp}} (\pi_{N/Y})_*\tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+} \longrightarrow 0.$$

また、$\mathcal{B}_{M_+}$，$\tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ は $\mathcal{BO}$ の切断の M または N へのコホ

モロジー的な境界値の和として表わされ、しかもくさびの刃の定理が成立するので、$\mathcal{BO}$の曲面波分解を用いて次を得る.

<u>命題1.2.</u> 自然な1対1の層準同型 $\alpha : \mathcal{B}_{N|M_+} \to \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}$, $\alpha : \mathcal{C}_{N|M_+} \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}$ が存在して次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N/Y}{}^{-1}\mathcal{B}_{N|M_+} & \xrightarrow{\alpha} & \pi_{N/Y}{}^{-1}\tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+} \\ \downarrow sp_+ & & \downarrow \tilde{sp} \\ \mathcal{C}_{N|M_+} & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+} \end{array} .$$

以下、$\mathcal{M}$を連接$\mathcal{D}_X$-加群（線型偏微分方程式系）で次の条件（NC）または（FS）のいずれか一方をみたすものとする:

（NC） Yは$\mathcal{M}$に関して非特性的.

（FS） $\mathcal{M} = (\mathcal{D}_X)^m / (\mathcal{D}_X)^m P$, Pは Fuchs系（cf. 田原[15]）即ち、admissible な局所座標系 $z = (z_1, z')$ により、

$$P = a(z)(z_1 D_1 I_m - A(z, D'))$$

と書ける. 但し、$a(z)$ は0とならない正則函数, $D_j = \partial/\partial z_j$, $D' = (D_2, \cdots, D_n)$, $A(z, D')$ は D_1 を含まない $\mathcal{D}_X$ の $m \times m$ 行列で、$n_1, \cdots, n_m \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\mathrm{ord}\, A_{ij}(z, D') \leq n_i - n_j + 1 \qquad (1 \leqq i, j \leqq m),$$

$$\mathrm{ord}\, A_{ij}(0, z', D') = 0 \qquad (1 \leqq i, j \leqq m).$$

更に、$A_0(z') = (A_{ij}(0, z', D'))_{1 \leqq i, j \leqq m}$ の固有値を重複を込めて $\lambda_1(z'), \cdots, \lambda_m(z')$ とするとき、

$$\lambda_i(z') - \lambda_j(z') \notin \mathbb{Z} \quad \text{if} \quad i \neq j.$$

<u>定理1.1.</u> $\mathcal{M}$を(NC)をみたす連接$\mathcal{D}_X$-加群とすると、1対1の層準同型 $\gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{N|M_+}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N)$, $\gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|M_+}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_N)$が存在して次の図式は可換($\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}/z_1\mathcal{M}$ は$\mathcal{M}$のYへの接方程式系):

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N/Y}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{N|M_+}) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_{N/Y}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N) \\ \downarrow sp_+ & & \downarrow sp \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|M_+}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_N). \end{array}$$

(γを境界値写像と呼ぶ.)

(証明の概略) 次の同型が示される:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N),$$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_N).$$

従ってこれと命題1.2から定理1.1は直ちに示される.

次に$\mathcal{M}$が(FS)をみたす場合を考えよう. $L(A_0)$をN上の$(dx_1)^{A_0(x')}$で定義されたm次元複素ベクトルバンドルとする. 即ち, $z = (z_1, z')$, $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}')$ を2つのadmissibleな局所座標系とすると、$L(A_0)$ の点は $c \in \mathbb{C}^m$ により$(dx_1)^{A_0}c$と書かれ、同じfiberにある2つの点 $(dx_1)^{A_0}c$ と$(d\tilde{x}_1)^{A_0}\tilde{c}$は $c = (d\tilde{x}_1/dx_1(0))^{A_0(x')}\tilde{c}$ のときに限り一致する.

<u>定理1.2.</u> $\mathcal{M}$を(FS)をみたす連接$\mathcal{D}_X$-加群とすると、1対1の層準同型(境界値写像)

$$\gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{N|M_+}) \longrightarrow \mathcal{B}_N \otimes_{\mathbb{C}} L(A_0),$$

$$\gamma : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|M_+}) \longrightarrow \mathcal{C}_N \otimes_{\mathbb{C}} \pi_{N/Y}^{-1} L(A_0)$$

が存在して次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_{N/Y}^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{N|M_+}) & \xrightarrow{\gamma} & \pi_{N/Y}^{-1}(\mathcal{B}_N \otimes_{\mathbb{C}} L(A_0)) \\
\downarrow sp_+ & & \downarrow sp \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{N|M_+}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}_N \otimes_{\mathbb{C}} \pi_{N/Y}^{-1} L(A_0).
\end{array}$$

（証明の概略）田原の定理（[15] の Theorem 1.3.6）により、

ある種の形式的無限階偏微分作用素の $m \times m$ 行列

$Q(z, D')$ で可逆なものが存在して、

(1) $$Q^{-1}(z_1 D_1 I_m - A(z, D'))Q = z_1 D_1 - A_0(z')$$

が成立する．Q は $\mathcal{B}\mathcal{O}_{Y|\tilde{M}_+}$，従って $\tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}$ と $\tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}$ に作用することがわかるので、$\mathcal{N} = (\mathcal{D}_X)^m/(\mathcal{D}_X)^m(z_1 D_1 - A_0)$ とおけば、

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}),$$
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+})$$

が成立する．一方，$u(x)$ を $\mathcal{M}$ の $\tilde{\mathcal{B}}_{M M_+}$（$\tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}$）-解とすると、(1) から容易にわかるように、$v(x') \in (\mathcal{B}_N)^m$ （$(\mathcal{C}_N)^m$）がただ一つ存在して，$Q^{-1}u(x) = x_1^{A_0(x')} v(x')$ と表わされる．そこで、$\tilde{\gamma}(u) = (dx_1)^{A_0} v(x') \in \mathcal{B}_N \otimes_{\mathbb{C}} L(A_0)$
（$\mathcal{C}_N \otimes_{\mathbb{C}} \pi_{N/Y}^{-1} L(A_0)$）とおくと、$\tilde{\gamma}(u)$ は admissible な局所座標系によらずに定義されることがわかり，同型写像

$$\tilde{\gamma} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{B}}_{N|M_+}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_N \otimes_{\mathbb{C}} L(A_0),$$

$$\tilde{\gamma} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{C}}_{N|M_+}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_N \otimes_{\mathbb{C}} \pi_{N/Y}^{-1} L(A_0)$$

が定義される．$\gamma = \tilde{\gamma} \circ \alpha$ とおけばγは定理の性質をみたすことは明らか．

層$\mathcal{C}_{M_+}$（従って層$\mathcal{C}_{N|M_+}$）は次のように通常のマイクロ函数の層$\mathcal{C}_M$と関係付けられる．$p : S^*_M X \setminus S^*_{\tilde{M}} X \to S^*_M \tilde{M}$を自然な写像とすると、$p^{-1}(L_+)$（但し$L_+ = S^*_{\tilde{M}} \tilde{M}|_{M_+}$）上で次の自然な層準同型が存在する：

$$\psi : p^{-1}\mathcal{C}_{M_+} \longrightarrow \mathcal{C}_M .$$

更に、$\mathcal{B}_{M_+}|_{M_+} = \mathcal{B}_M|_{M_+}$ の section f に対して、$\psi(sp_+(f)) = sp(f)$ が成り立つ．従って、特に定理1.1と1.2の超局所的境界値写像の単射性により、境界値問題の解のミクロ解析性が境界から内部へ伝播することがわかる．次節ではこの逆の方向の伝播を調べる．

§2. ミクロ双曲型境界値問題.

$H : T^*(T^*X) \xrightarrow{\sim} T(T^*X)$をHamilton写像とする．$T^*X$の点、$x^*$と$T^*X$の部分集合$S$, Vに対して$T_{x^*}(T^*X)$の閉部分集合$C_{x^*}(S;V)$（SのVに沿う法錐）が次のように定義される（柏原-Schapira [4]）：$v \in T_{x^*}(T^*X)$は、

$$x_k \to x^*, \quad y_k \to x^*, \quad a_k(x_k - y_k) \to v \quad (k \to \infty)$$

なるSの点列$\{x_k\}$, Vの点列$\{y_k\}$, $\mathbb{R}_+$の点列$\{a_k\}$が存在するとき、そのときに限り$C_{x^*}(S;V)$に属する．

$\theta_0 = dz_1 \in T^*(T^*X)$ は admissible な局所座標系に(正の定数倍を除いて)よらないことに注意する.

定義 2.1. $\mathcal{M}$ を $x^* \in T^*_M X|_N$ の近傍で定義された連接 $\mathcal{E}_X$-加群とする.

$$H(\theta_0) \notin C_{x^*}(SS(\mathcal{M}) \cap T^*X|_{\tilde{M}_+} ; T^*_M X)$$

のとき、$\mathcal{M}$ は x^* で $\tilde{M}_+$ に関して θ_0 方向にミクロ双曲型であるという ($SS(\mathcal{M})$ は $\mathcal{M}$ の特性多様体を表わす).

上の条件で $T^*X|_{\tilde{M}_+}$ がないときが、柏原-Schapira [4] による通常のミクロ双曲性の定義であるから、我々の定義はそれよりも弱い. 特に境界上の $\mathcal{M}$ の特性多様体は上の定義には無関係であることに注意する. $L_0 = S^*_N Y \subset S^*_M \tilde{M}$ とおくと, $\mathcal{C}_{M+}$ の台は $S^*_M \tilde{M}|_{\overline{M}_+}$ であるから、$(R)\Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M+}) = (R)\Gamma_{S^*_M\tilde{M}|(M \setminus M_+)}(\mathcal{C}_{M+})$ に注意すれば、次の定理は柏原-Schapira の定理の境界値問題での類似とみなせる.

定理 2.1. $\rho : T^*X|_Y \longrightarrow T^*Y$ を自然な写像とする. $x^* \in S^*_N Y$ として、$\mathcal{M}$ を $\pi_{N/Y}(x^*)$ の近傍で定義された連接 $\mathcal{D}_X$-加群で次の (C.1) ~ (C.3) をみたすものとする.

(C.1) $(T^*_Y X \setminus 0) \cap \overline{(SS(\mathcal{M}) \cap T^*X|_{\tilde{M}_+})} = \phi$,

(C.2) $\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}$ は $\rho^{-1}(x^*) \cap T^*_M X$ の各点で $\tilde{M}_+$ に関して θ_0 方向にミクロ双曲型.

(C.3) z を admissible な局所座標系, $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$ をその

双対座標とすると、

$$p^{-1}(x^*) \cap \overline{(SS(\mathcal{M}) \cap T^*X|_{\tilde{M}_+})} \subset \{(\zeta_1, x^*) \in p^{-1}(x^*);\ \mathrm{Re}\,\zeta_1 \geq 0\}.$$

このとき $L_0 = S_N^*Y \,(\subset S_M^*\tilde{M})$ とおくと、

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\ \Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+}))_{x^*} = 0.$$

この定理の証明（の概略）は後まわしにして、この定理から (NC) または (FS) をみたす方程式系に対する境界値問題の解のミクロ解析性が (C.1)～(C.3)の条件の下で、境界迄伝播することが従うことを示そう。その為に次の補題を用いる。

<u>補題2.1.</u> $\mathcal{M}$ を連接 $\mathcal{D}_X$-加群で定理2.1の条件 (C.1) をみたすものとすると、$\pi_{N/Y}(x^*)$ の M での近傍 V が存在して、§1 で定義された層準同型 ψ の引き起こす層準同型

$$\psi:\ p^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{M_+}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)$$

は $p^{-1}(L_+ \cap (\pi_{M/\tilde{M}})^{-1}(V))$ 上で1対1. 但し、

$L_+ = S_M^*\tilde{M}|_{M_+}$.

（証明の概略）u を $\mathcal{M}$ の $\mathcal{C}_{M_+}$-解とすると、u は $\mathcal{BO}$ のくさび状領域からの境界値（の sp_+ による像）として表わされる。(C.1) は大雑把に言って、$x_1 = t$ ($t > 0$) で定義される超曲面が $\mathcal{M}$ に関して非特性的となるという条件であることに注意すると、u は $\mathcal{AO} = \mathcal{O}_X|_{\tilde{M}}$ の section のくさび状領域からの境界値として表わされることがわかる。更に局所的 Bochner の定理により u は正則函数の境界値となるから、も

し $\psi(u)$ がマイクロ函数として0ならば、u は $\mathcal{C}_{M_+}$ の切断として0になることがわかる．

定理2.2. $x^* \in S_N^*Y$ として，$\mathcal{M}$ を $\pi_{N/Y}(x^*)$ の近傍で定義された連接 $\mathcal{D}_X$-加群で、Y は $\mathcal{M}$ に関して非特性的なものとする．更に $\mathcal{M}$ は x^* で条件 (C.2) と (C.3) をみたすと仮定する．このとき、u を x^* の $S_M^*\tilde{M}$ における近傍 U で定義された $\mathcal{M}$ の $\mathcal{C}_{M_+}$-解で、$\psi(u)$ は $p^{-1}(U \cap L_+)$ 上で $\mathcal{M}$ のマイクロ函数解として0となるものとすると、$\gamma(u)$ は $\mathcal{M}_Y$ の $\mathcal{C}_N$-解として、$x^* = 0$ の近傍で0となる．

(証明) 補題2.1により u の $\mathcal{C}_{M_+}$ の section としての台は $\{x_1 \leq 0\}$, 従って L_0 に含まれることがわかる．即ち

$$u \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+}))_{x^*}$$

であるから、定理2.1により u は x^* の近傍で0，特に $\mathcal{C}_{N|M_+} = \mathcal{C}_{M_+}|_{L_0}$ の section として x^* の近傍で0になるから定理1.1の超局所的な境界値写像 γ による像 $\gamma(u)$ も $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_N)$ の section として x^* の近傍で0になる．

系. $(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$; $(\zeta, \theta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d$ を (z, w) の双対変数とする．$P(z, w, D_z, D_w)$ を $(0,0)$ の近傍で定義された正則係数の線型偏微分作用素で、$\{(z, w) ; z_1 = 0\}$ は P に関して非特性的なものとする．更に $C, \varepsilon > 0$ が存在して、$z = (x_1, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}$, $|z| < \varepsilon$, $x_1 > 0$, $w \in \mathbb{C}^n$,

$|w| < \varepsilon$, $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_d) \in \mathbb{C}^n$, $\zeta_n \neq 0$, $|\zeta_j/\zeta_n| < \varepsilon$ $(2 \leqq j \leqq n-1)$, $|\theta_k/\zeta_n| < \varepsilon$ $(k = 1, \cdots, d)$ かつ

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_n}\right) > C\left(\sum_{j=2}^{n}|\mathrm{Im}\, z_j| + \sum_{j=2}^{n-1}\left|\mathrm{Im}\left(\frac{\zeta_j}{\zeta_n}\right)\right| + \sum_{k=1}^{d}\left|\frac{\theta_k}{\zeta_n}\right|\right)$$

のとき、Pの主シンボル $\sigma(P)(z, w; \zeta, \theta)$ は0にならないと仮定する. このとき $u(x, w)$ を $\{(x, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d;\ |x| < \varepsilon,\ x_1 > 0,\ |w| < \varepsilon\}$ で定義された w を正則パラメータとする超函数で

$$P(x, w, D_x, D_w)u(x, w) = 0$$

をみたすものとすると、境界値 $D_1^\nu u(+0, x', w)$ $(\nu = 0, \cdots, \mathrm{ord}\, P - 1)$ 達が $(0, 0, \sqrt{-1}\, dx_n \infty) \in \sqrt{-1}\, S^*(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}^d)$ でミクロ解析的となる為の必要十分条件は、ある $\delta > 0$ が存在して、$u(x, w)$ が

$$\{(x, w, \sqrt{-1}\langle \eta, dx\rangle\infty \in \sqrt{-1}\, S^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d);\ x_1 > 0, |x| < \delta,$$
$$|w| < \delta,\ \eta = (\eta_1, \eta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1},\ |\eta' - (0, \cdots, 0, 1)| < \delta\}$$

上でミクロ解析的となることである.

(証明) $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d$, $M_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}^d$, $X = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d \times \overline{\mathbb{C}}^d$ として X 上の方程式系

$$\mathcal{M}:\ P(z, w, D_z, D_w)u = \frac{\partial}{\partial \overline{w}_1}u = \cdots = \frac{\partial}{\partial \overline{w}_d}u = 0$$

を考える. $\theta = \lambda + \sqrt{-1}\mu$ とおき λ, μ を複素化して $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^d$

とすると、$\mathcal{M}$の特性多様体 $SS(\mathcal{M})$ $(\subset T^*X)$は

$$\{(z,w,\bar{w};\zeta,\theta,\bar{\theta}) \in X\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^d\times\bar{\mathbb{C}}^d;\quad \bar{\theta}=0,$$
$$\sigma(P)(z,w;\zeta,\theta)=0\}$$
$$=\{(z,w,\bar{w};\zeta,\lambda,\mu)\in X\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^d\times\mathbb{C}^d;\ \lambda-\sqrt{-1}\mu=0,$$
$$\sigma(P)(z,w;\zeta,\lambda+\sqrt{-1}\mu)=0\}$$

に含まれる. $\lambda-\sqrt{-1}\mu=0$ のとき

$$2d(|\mathrm{Im}\,\lambda|+|\mathrm{Im}\,\mu|)=2d(|\mathrm{Re}\,\mu|+|\mathrm{Im}\,\mu|)\geq 2d|\mu|$$
$$=d|\theta|\geq\sum_{k=1}^{d}|\theta_k|$$

だから, $z=(x_1,z')\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n-1}$, $|z|<\varepsilon$, $x_1>0$, $|w|<\varepsilon$, $(w\in\mathbb{C}^n)$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$, $\zeta_n=1$, $|\zeta'|<\varepsilon$, $|\lambda|<\varepsilon/2$, $|\mu|<\varepsilon/2$ かつ

$$\mathrm{Im}\,\zeta_1>2dC\left(\sum_{j=2}^{n}|\mathrm{Im}\,z_j|+\sum_{j=2}^{n-1}|\mathrm{Im}\,\zeta_j|+|\mathrm{Im}\,\lambda|+|\mathrm{Im}\,\mu|\right)$$

のとき, $(z,w,\bar{w};\zeta,\lambda,\mu)\notin SS(\mathcal{M})$ となる. 従って、$\mathcal{M}$ は $x^*=(0,0,\sqrt{-1}dx_n\infty)$ で定理2.2の条件をみたす.

例2.1. $M=\mathbb{R}^4$, $k, m\in\mathbb{N}$ とすると、

$$\mathcal{M}:\ ((D_1+\sqrt{-1}x_1^kD_2)^m+D_3^m)u=(D_3+\sqrt{-1}D_4)u=0$$

は $x^*=(0,\sqrt{-1}dx_2)$ で定理2.2の条件をみたす.

次に Fuchs 系を考えよう. 条件(FS)をみたす P に対して

$$(\det P)(z,\zeta)=\det\left(z_1\zeta_1I_m-(\sigma_{n_i-n_j+1}(A_{ij})(z,\zeta'))\right)$$

とおく(ここで一般に σ_ν は ν 階の主シンボルを表わす). このとき $SS(\mathcal{M})=\{(z,\zeta)\in T^*X;\ (\det P)(z,\zeta)=0\}$ が

成立する（佐藤－柏原[11]）.

<u>定理2.3.</u> Uを$x^* \in S_N^*Y$ の$S_M^*\tilde{M}$ における近傍とする. $\mathcal{M} = (\mathcal{D}_X)^m/(\mathcal{D}_X)^m P$ を $\pi_{M/\tilde{M}}(U)$ のXでの近傍上定義された、条件（FS）（cf. §1)をみたす連接$\mathcal{D}_X$-加群とする. 更に、$(x, \sqrt{-1}\xi'\infty) \in U \cap L_+$ かつ $\mathrm{Re}\,\zeta_1 < 0$ のとき、$(\det P)(x, \zeta_1, \sqrt{-1}\xi') \neq 0$ と仮定する. このとき、uをU上定義された$\mathcal{M}$の$\mathcal{C}_{M_+}$-解で、$\psi(u)$ は $p^{-1}(U \cap L_+)$上 $\mathcal{M}$ のマイクロ函数解として0となるものとすると、$\gamma(u)$ は $\mathcal{C}_N \otimes_{\mathbb{C}} \pi_{N/Y}^{-1} L(A_0)$ の section として $U \cap S_N^*Y$ 上で0となる.

（証明） $\mathcal{M}$はこのままでは、一般には（C.1）と（C.2）をみたさないが、$k \geq m$ かつ $k(\lambda_i(x') - \lambda_j(x')) \notin \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ なる整数kによる

$$z_1 = \tilde{z}_1^{\,k}, \quad z_j = \tilde{z}_j \qquad (j = 2, \cdots, n)$$

という変換で$\tilde{z}$座標に移り、それによるPの表示を$\tilde{P}$とすれば、$(\det \tilde{P})(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = k^{-m}\tilde{z}_1^{\,m}\,\tilde{p}(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$，$\tilde{p}$ は$\tilde{\zeta}_1$について monic な多項式、という形になる. $x_1 > 0$ では上の変換は座標変換になっているから、$\mathcal{B}\mathcal{O}_{\tilde{M}_+}$，従って$\mathcal{C}_{M_+}$ の変換として well-defined である. 更に$\psi(u)$に関する条件もこの変換で不変だから、結局Pのかわりに$\tilde{P}$を考えればよい. $\tilde{P}$については（C.1）と（C.2）が成り立つから定理2.1と補題2.1

から定理2.3が従う.

§3. 定理2.1の証明の概略.

$x^* = (0, -\sqrt{-1}\,dx_n\infty) \in S_N^*Y$ としてよい. $\varepsilon > 0$ に対して, $Z_\varepsilon = \{(x_1, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1}\ ;\ y_n \geqq \varepsilon|y'|\}$ とおくと, 片岡[5]の補題4.1.10を $\mathcal{BO}_{\tilde{M}_+}$ に適用して,

$$\mathbb{R}\Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+})_{x^*} = \Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+})_{x^*} \cong \varinjlim_{\varepsilon, \Omega, \Omega_+} \mathbb{R}\Gamma_{Z_\varepsilon \cap (\Omega \setminus \Omega_+)}(\Omega \cap \tilde{M}_+ ; \mathcal{BO})[n-1]$$

を得る. ここで Ω は 0 の $\tilde{M}$ での開近傍, Ω_+ は $\Omega \cap M_+$ の開近傍で帰納極限は $\varepsilon \to +0$, Ω と Ω_+ は小さくなるとしてとったもの. 0 の近傍で $\mathcal{M}$ の長さ有限の自由分解

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}_X^{n_0} \xleftarrow{P_1} \mathcal{D}_X^{n_1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{P_r} \mathcal{D}_X^{n_r} \leftarrow 0$$

をとろう. D を 0 の $X = \mathbb{C}^n$ での凸開近傍として, 各 $P_1, \cdots, P_r$ の成分は D 上の $\mathcal{D}_X$ の section であるとしてよい. 条件(C.1)〜(C.3)から次のような定数 $C_0 > 4$ と $0 < c_0 < 1/4$ がとれることがわかる.

(2) $\{z \in X\ ;\ |z| \leqq 4nc_0\} \subset D$,

(3) $\{(x_1, z', \zeta) \in T^*X|_{\tilde{M}_+}\ ;\ 0 < x_1 \leqq c_0,\ |z'| \leqq c_0,$
$\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\},\ |\zeta_1| \geqq C_0|\zeta'|\} \cap SS(\mathcal{M}) = \phi$,

(4) $\{(x_1, z', \zeta) \in T^*X|_{\tilde{M}_+}\ ;\ 0 < x_1 \leqq c_0,\ |z'| \leqq c_0,\ \mathrm{Im}\,\zeta_n < 0,$
$|\mathrm{Re}\,\zeta'| \leqq c_0|\mathrm{Im}\,\zeta_n|,\ |\mathrm{Im}\,\zeta''| \leqq c_0|\mathrm{Im}\,\zeta_n|,$

$\operatorname{Re}\zeta_1 < -C_0(|\operatorname{Re}\zeta'| + |\operatorname{Im} z'||\operatorname{Im}\zeta_n|)\} \cap SS(\mathcal{M}) = \phi.$

ここで、$\zeta'' = (\zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1})$ とおいた. a, b, C を

(5) $\quad 0 < b < \dfrac{c_0}{8}, \quad C \geqq 2C_0, \quad 0 < a \leqq a_0 = a_0(b) = \dfrac{bc_0}{8C_0}$

をみたすパラメータとして,

$$Z = Z(b) = \{(x_1, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1};\ y_n \geqq \frac{b}{a_0}(x_1 + a_0)|y''|\},$$

$$\Omega = \Omega(a, C) = \{(x_1, z');\ x_1 > 0,\ x_1 + a > \frac{1}{4C_0}(|x'| + \frac{y_n}{c_0}),$$
$$x_1 + a > C(|y''| + \frac{y_n}{c_0})\}$$

とおく. $H(a, C)$ を $[0, a]$ 上の C^1 関数 h で

(6) $\begin{cases} h(0) = 0, \quad 0 < h(x_1) \leqq C_0 \quad \text{for } 0 < x_1 \leqq a_0, \\ 0 \leqq h'(x_1) \leqq C_0 \quad \text{for } 0 \leqq x_1 \leqq a, \quad 2\dfrac{c_0 a}{C} < h(a) \end{cases}$

をみたすもの全体の集合とする. $h \in H(a, C)$ に対して

$$\omega = \omega(a, b, C, h) = \{(x_1, z') \in \Omega(a, C);$$
$$y_n < h(x_1)\exp\left(\frac{8C_0}{b}x_1\right) \text{ or } y_n < \frac{b}{a_0}(x_1 + a_0)|y''|\}$$

とおく. 但し $x_1 > a$ に対しては $h(x_1) = +\infty$ と規約する.

$$\mathcal{J} = \{(a, b, C, h);\ a, b, c \text{ は } (5) \text{ をみたし、} h \in H(a, C)\}$$

とおき、$\mathcal{J}$ に順序 $\geqq$ を次のように定義する:

$$(a_1, b_1, C_1, h_1) \geqq (a_2, b_2, C_2, h_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \leqq a_2, \quad b_1 \leqq b_2, \quad C_1 \geqq C_2, \quad h_j \in H(a_j, C_j), \\ \dfrac{1}{b_1}h_1(x_1)\exp\left(\dfrac{8C_0}{b_1}x_1\right) \leqq \dfrac{1}{b_2}h_2(x_1)\exp\left(\dfrac{8C_0}{b_2}x_1\right) \quad (0 \leqq x_1 \leqq a_1) \\ \dfrac{c_0}{C_1}(x_1 + a_1) \leqq h_2(x_1)\exp\left(\dfrac{8C_0}{b_2}x_1\right) \quad (a_1 < x_1 \leqq a_2). \end{cases}$$

このとき $\Omega(a_1, C_1) \subset \Omega(a_2, C_2)$, $\omega(a_1, b_1, C_1, h_1) \subset$

$\omega(a_2, b_2, C_2; h_2)$ となることが容易にわかる．

族 $\{\Omega(a, C) \setminus \omega(a, b, C, h)\}_{(a, b, C, h) \in \mathcal{A}}$ は最初に述べた $\Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+})$ の表示に現われた Z_ε, Ω, Ω_+ による族 $\{Z_\varepsilon \cap (\Omega \setminus \Omega_+) \cap \tilde{M}_+\}$ と同値になるので，

$$(7)\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{L_0}(\mathcal{C}_{M_+}))_{x^*}$$
$$\cong \varinjlim_{\mathcal{A}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Omega \setminus \omega}(\Omega; \mathcal{B}\mathcal{O}))[n-1]$$

を得る．（$\Omega = \Omega(a, C)$, $\omega = \omega(a, b, C, h)$.）

$(a, b, C, h) \in \mathcal{A}$ と $0 < t_0 \leqq a$ なる t_0 を固定して，

$$\Omega_{t_0} = \{(x_1, z') \in \Omega;\ x_1 > \frac{t_0}{4C_0 b} y_n + t_0,$$
$$y_n + c_0(|x'| + |y''|) < \frac{1}{2}c_0^2\},$$
$$\omega_{t_0} = \Omega_{t_0} \cap \omega, \quad \Omega_{t_0, t} = \Omega_t \cup \omega_{t_0}$$

とおくと，$\{\Omega_{t_0, t}\}_{t_0 \leqq t \leqq a}$ は減少列で，$\Omega_{t_0, t_0} = \Omega_{t_0}$, $\Omega_{t_0, a} = \omega_{t_0}$ をみたす．

$$D(a) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ 0 < x_1 < 4a,\ |y_1| < c_0,\ y_n > -c_0^2,$$
$$y_n + c_0(|x'| + |y''|) < c_0^2\},$$

$D'(a) = D(a) \cap \tilde{M}$ とおくと，$\Omega_{t_0} \setminus \omega_{t_0} \subset D'(a) \subset D$ が成り立つ．$D'(a)$ の複素接バンドル $T D'(a)$ の部分集合 Q を $z = (x_1, z') \in T(D')$ に対して（$w' = u' + \sqrt{-1}v'$ とする）

$$Q(z) = \{w = (u_1, w') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1};\ |u'| + \frac{v_n}{c_0} < \min(4C_0 u_1,$$
$$\frac{16C_0}{t_0} u_1),\quad |v''| + \frac{v_n}{c_0} < \min(\frac{4C_0|y'|}{c_0} u_1,\ \frac{1}{C} u_1)\}$$

により定義すると $\Omega_{t_0, t_1} \setminus \Omega_{t_0, t_2}$ は柏原-Schapira [4]の意味で $D'(a)$ 上 Q-flat になる $(t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq a)$ ことが確かめられる．更に

$$Q(z)^\circ \equiv \{ \zeta = (\xi_1, \zeta') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} ;\ \mathrm{Re}\langle \zeta, w \rangle < 0 \text{ for } {}^\forall w \in Q(z) \}$$
$$\subset \{ \zeta = (\xi_1, \zeta') ;\ |\xi'| \leqq -c_0 \eta_n ,\ |\eta''| \leqq -c_0 \eta_n ,$$
$$\xi_1 \leqq -2c_0(|\xi'| - |y'|\eta_n) \}$$

となることがわかり、(4) から Q° は $SS(\mathcal{M})$ と交わらない．

一般に、S を $\tilde{M}$ の閉集合で ∂S は C^1-級かつ ∂S は $\mathcal{M}$ に関して非特性的とすると、$\mathring{x} \in \partial S$ に対して

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_Z(\mathcal{B}\mathcal{O}))_{\mathring{x}} = 0$$

が成立するので、柏原-Schapira [4]の定理4.1.1が族 $\{\Omega_{t_0, t}\}_{t_0 \leqq t \leqq a}$ 上の（$\mathcal{O}_X$ でなく）$\mathcal{B}\mathcal{O}$ 係数のコホモロジーについても成立することが示される．従って、

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Omega_{t_0} \setminus \omega_{t_0}}(\Omega_{t_0} ; \mathcal{B}\mathcal{O})) = 0$$

を得る．$t_0 > 0$ は任意だったから、Mittag-Leffler の議論により、$t_0 \to +0$ としたときの射影極限をとって

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Omega \setminus \omega}(\Omega ; \mathcal{B}\mathcal{O})) = 0 \quad \text{for } {}^\forall (a, b, C, h) \in \mathcal{S}$$

を得る．これと (7) により定理 2.1 が証明された．

§4. あとがき.

本稿では連接 $\mathcal{D}_X$-加群のみを考えたが、D_1 に関して多項式であるような $\mathcal{E}_X$ の元からなる $\mathcal{E}_X$ の部分環（の層）$\mathcal{R}$ を考

え、$\mathcal{M}$として連接$\mathcal{R}$-加群をとっても、本稿で述べた定理が成立すると思われる。従って、連接$\mathcal{D}_X$-加群の場合でも、条件(N.C)と(C.2)のみをみたす場合を扱うことができよう。これは境界条件の下でのミクロ解析性の境界までの伝播を意味する(単独方程式の場合にはSchapira[13]による)。更に内部から境界への伝播だけでなく、Sjöstrand[14]のように、境界に沿っての伝播(適当な境界条件の下で)も含めて扱うことは今後の課題であろう。本稿の定理の証明の詳細については[8]を参照されたい。

金子[1]の議論と定理2.2及び2.3を組み合わせて、実解析解の接続についての金子の定理([1],[2])を、非特性超曲面を持つ線型偏微分方程式系、及び単独のFuchs型偏微分方程式の両者に拡張することができる(Fuchs型方程式の場合には更に、Fuchs型偏微分方程式に対する境界値問題の理論、特にF-マイルド超函数の理論を用いる)。詳細については[9],[10]を参照されたい。

References

[1] Kaneko, A., Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 25 (1975), 59-68.

[2] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS 12 Suppl. (1977), 113-121.

[3] Kashiwara, M., Kawai, T., On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations. I, II, Proc. Japan Acad. 48 (1972), 712-715; 49 (1973), 164-168.

[4] Kashiwara, M., Schapira, P., Micro-hyperbolic systems, Acta Math. 142 (1979), 1-55.

[5] Kataoka, K., On the theory of Radon transformations of hyperfunctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981), 331-413.

[6] Ôaku, T., A new formulation of local boundary value problem in the framework of hyperfunctions, Sûrikaiseki-kenkyûsho Kôkyûroku No.558 (1985), 265-291 (in Japanese).

[7] Ôaku, T., A new formulation of local boundary value problem in the framework of hyperfunctions. I, II, III, Proc. Japan Acad. 60 (1984), 283-286; 61 (1985), 129-132; 61 (1985), 197-200.

[8] Ôaku, T., Boundary value problems for systems of linear partial differential equations and propagation of micro-analyticity, Submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[9] Ôaku, T., Removable Singularities of solutions of linear partial differential equations —Systems and Fuchsian equations—, Submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.

[10] Ôaku, T., General boundary value problems in the framework of hyperfunctions, To appear in the Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Advances in Microlocal Analysis, D. Reidel Publishing Company.

[11] Sato, M., Kashiwara, M., The determinant of matrices of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 17-19.

[12] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, T., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. No. 287, pp. 265-529, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[13] Schapira, P., Propagation at the boundary and reflection of analytic singularities of solutions of linear partial differential equations I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 Suppl. (1977), 441-453.

[14] Sjöstrand, J., Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems. Math. Ann. 254 (1980), 211-256.

[15] Tahara, H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math. 5 (1979), 245-347.